Mécanique du point

CHAPITRE 3

Puissance et Energie en Référentiel Galiléen

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Introduction (1)

Nous avons vu la puissance des lois de Newton pour la compréhension et la résolution de nombreux problèmes physique. Dans ce chapitre, nous allons considérer une approche basée sur l'une des grandeurs la plus fondamentale et la plus universelle en physique : **L'ENERGIE**.

- Il est difficile de définir de manière unique l'énergie, elle peut présenter différentes formes. On peut voir l'énergie comme **la monnaie du monde physique**.

Introduction (2)

- Nous aborderons le théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel qui est résumée par le schéma ci-dessous (dont l'explication est le propos de ce chapitre). Ce dernier est un cas particulier du principe de conservation de l'énergie (ou premier principe de la thermodynamique). C'est pourquoi l'étude énergétique des systèmes en générale sera poursuivie dans le cours de thermodynamique.

Introduction (3)

Environnement

Travail des forces extérieures : W_{ext} ⟷

Transfert thermique (chaleur) : Q ⟷

Transfert de matière : T_M ⟷

Le systeme contient :

Energie cinétique : E_c

Energie potentielle : E_p

Energie interne : U

⟷ Transfert d'ondes mécaniques : T_{OM}

⟷ Transfert d'ondes électromagnétiques : T_{OEM}

⟷ Transfert électrique : T_{EL}

Travail et Puissance d'une force

Définitions (1)

Lorsqu'on applique une force pour déplacer un objet, l'effort qu'il faut fournir est d'autant plus important que la longueur du déplacement est grande et que la force appliquée est intense. **Le travail de la force est une grandeur qui va rendre compte de cet effort.** Ce travail peut être positif ou négatif selon que le système reçoit (de l'environnement extérieur) où donne du travail (à l'environnement extérieur).

On peut définir le travail (notation *W* pour Work en anglais) comme **le transfert d'énergie mécanique à un système physique par l'intermédiaire d'une force.**

Travail d'une force constante (1)

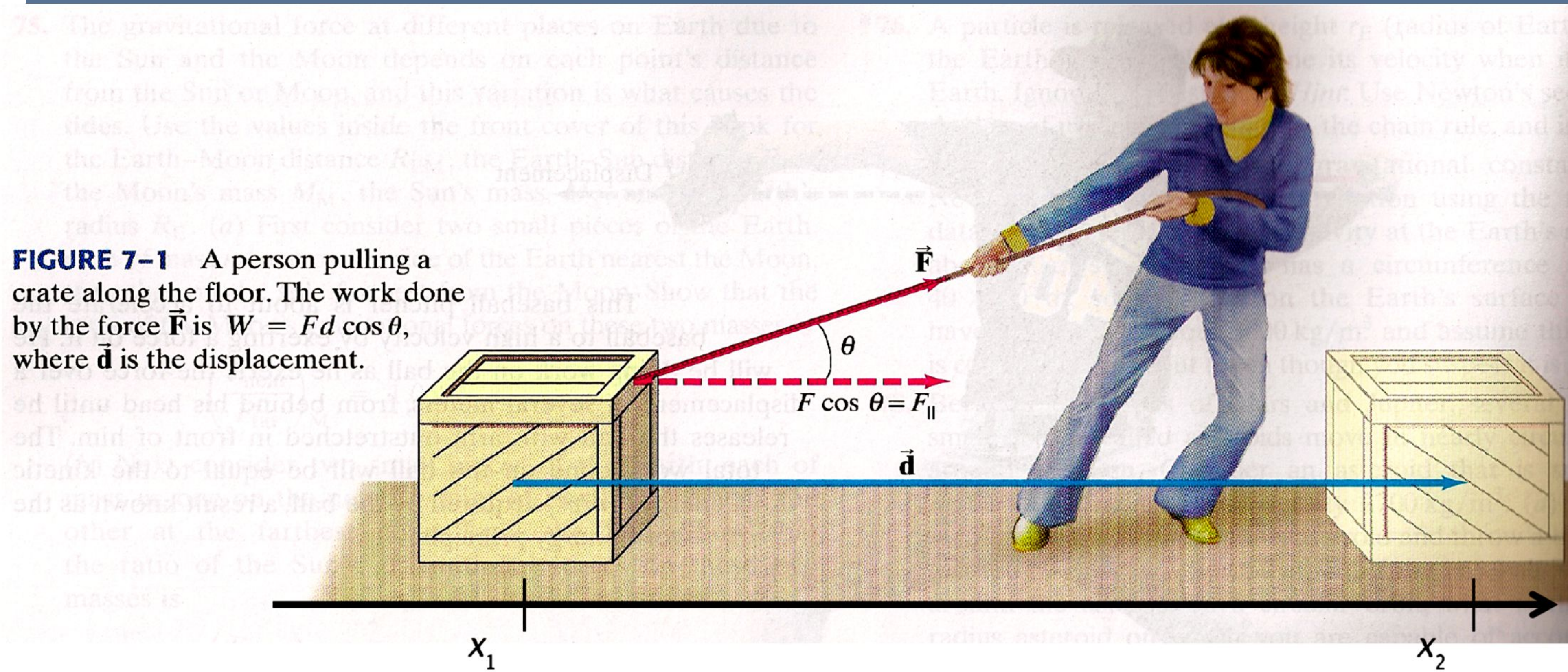


FIGURE 7–1 A person pulling a crate along the floor. The work done by the force $\vec{F}$ is $W = Fd\cos\theta$, where $\vec{d}$ is the displacement.

On considère la figure ci-dessus où une personne tire une caisse avec une force constante $\vec{F}$.

Travail d'une force constante (2)

Cette force exerce un « travail » puisqu'elle est capable de déplacer la case sur une distance horizontale $d = x_2 - x_1$.
Le travail de cette force vaut :

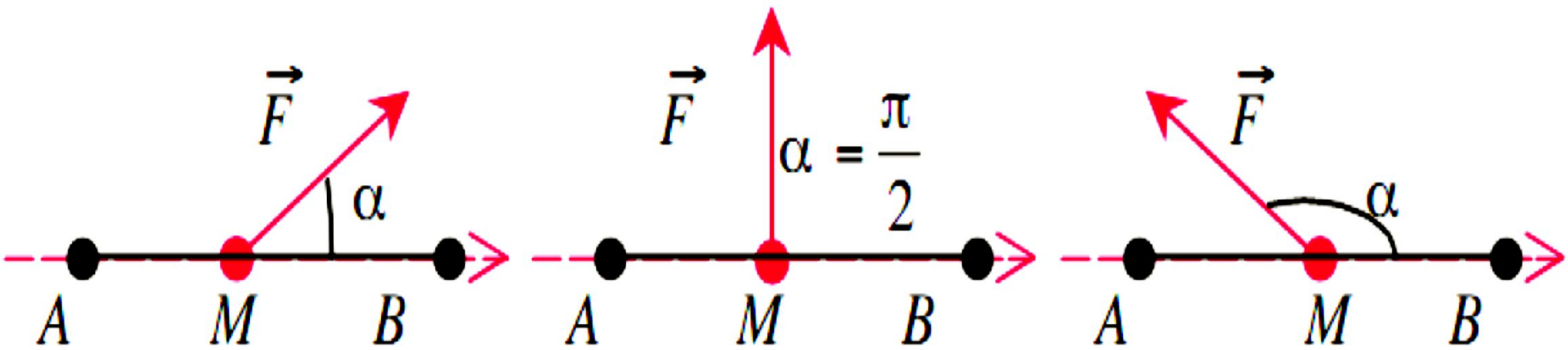
$$W = Fd\cos\theta$$

Le travail s'exprime en $\mathrm{kg.m^2.s^{-2}} = \mathrm{J}$, **le travail a la dimension d'une énergie.**

On constate que $F\cos\theta$ représente la composante de la force $\vec{F}$ selon la direction du déplacement $\vec{d}$. En résumé :

$$\boxed{\text{Travail d'une force constante = déplacement} \times \text{composante de la force parallèle au déplacement}}$$

Travail d'une force constante (3)



$\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0$	$\alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0$
$W_{AB}(\vec{F}) > 0$	$W_{AB}(\vec{F}) = 0$	$W_{AB}(\vec{F}) < 0$
Le travail est moteur	Le travail est nul	Le travail est résistant
La force contribue au déplacement	***La force ne travaille pas***	***La force s'oppose au déplacement***

Travail d'une force variable (1)

On considère à présent une force variable $\vec{F}$ (en norme, en direction ou les deux) ce qui représente une situation plus réaliste. La figure ci-contre représente le trajet d'un point matériel du point a au point b qui est soumis à la force $\vec{F}$ variable sur ce trajet. On souhaite calculer le travail de cette force sur le trajet considéré.

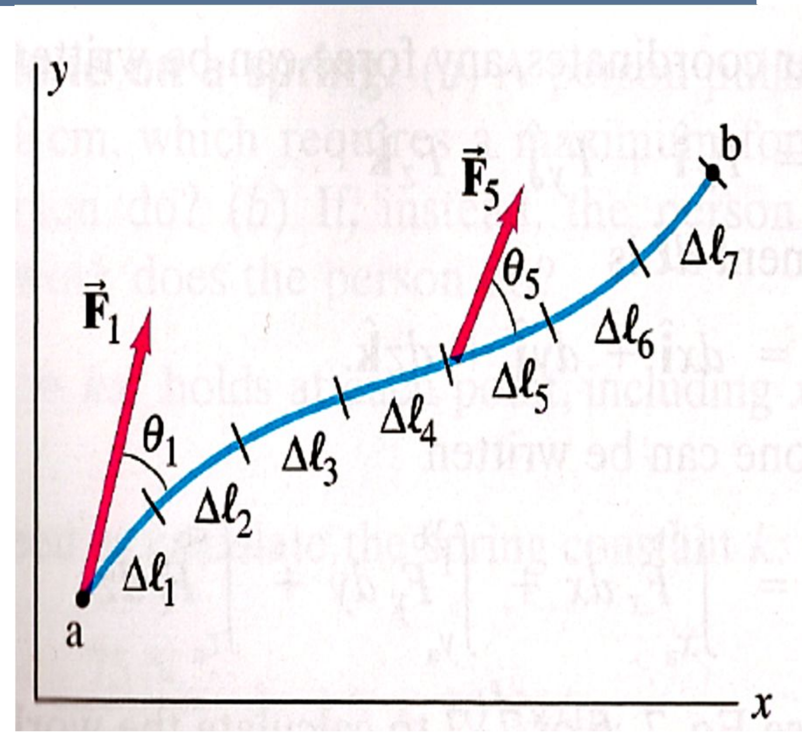


FIGURE 7–8 A particle acted on by a variable force, $\vec{F}$, moves along the path shown from point a to point b.

Travail d'une force variable (2)

On découpe le trajet en petits intervalles de longueur $\Delta\ell_i$. Sur chaque intervalle $\Delta\ell_i$, la force $\vec{F}_i$ peut être considérée comme constante. Ainsi sur $\Delta\ell_i$: $\delta W_i = F_i \cos\theta_i \, \Delta\ell_i$.
Le symbole δ symbolise une petite quantité, δW représente un **travail infinitésimal** c'est-à-dire très petit, on parle aussi de **travail élémentaire**. Le travail total de la force $\vec{F}$ sur le trajet de longueur

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \cdots = \sum_i \ell_i$$

s'exprime , en première approximation, comme la somme

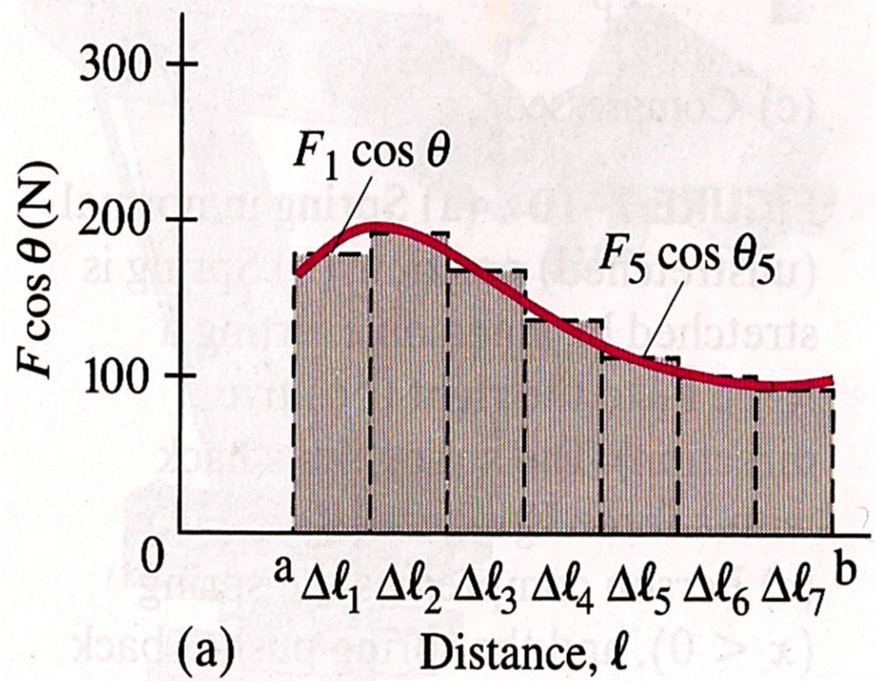
Travail d'une force variable (3)

des travaux élémentaires δW_i :

$$W \approx \sum_i \delta W_i = \sum_i F_i \cos\theta_i \,\Delta\ell_i$$

$\sum_i \delta W_i$ représente la somme de l'air de chaque rectangle alors que le véritable travail total W représente l'air sous la courbe (figure (a) ci-contre).des travaux élémentaires

FIGURE 7–9 Work done by a force F is (a) approximately equal to the sum of the areas of the rectangles, (b) exactly equal to the area under the curve of $F\cos\theta$ vs. ℓ.



Travail d'une force variable (4)

Pour que les deux airs correspondent, il faut faire tendre chaque $\Delta\ell_i$ vers zéro :

$$W = \lim_{\Delta\ell_i \to 0} \sum_i F_i \cos\theta_i \, \Delta\ell_i = \int_a^b F \cos\theta \, d\ell$$

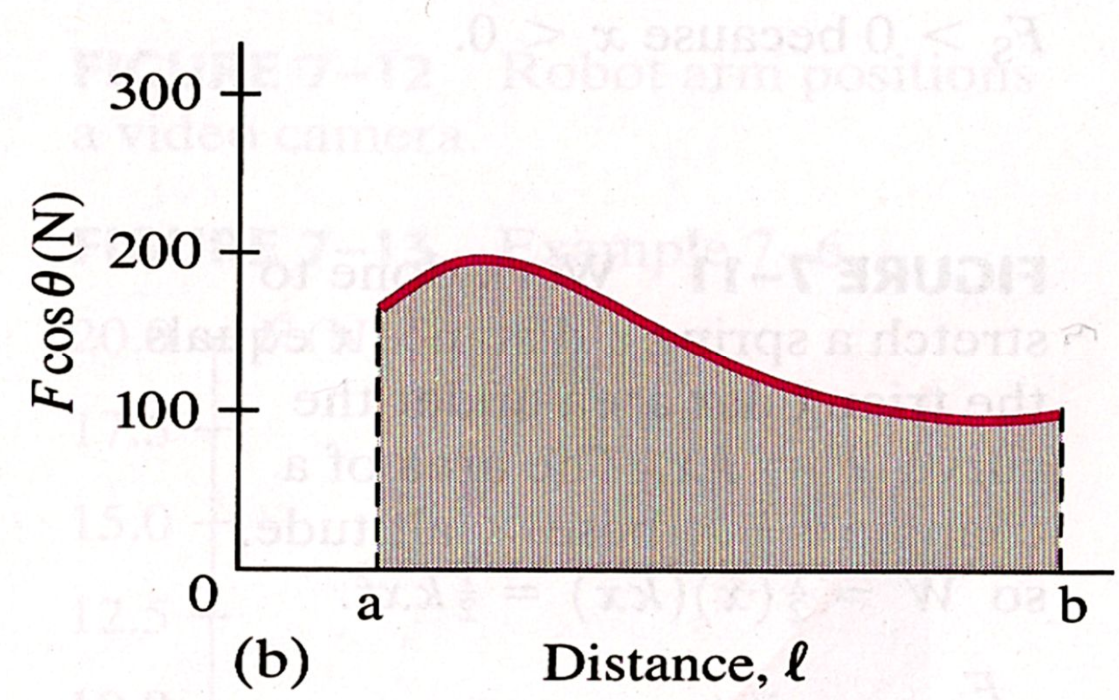
On retrouve le concept d'intégrale comme une somme infinie. Le symbole $\int$ représente un S allongé et remplace le symbole Σ . $\Delta\ell_i$ est remplacé par $d\ell$ qui signifie une distance infinitésimale (très petite).

$W = \int_a^b F \cos\theta \, d\ell$ représente l'air sous la courbe de la figure (b)

Travail d'une force variable (5)

ci-contre. A la limite où $\Delta\ell$ tend vers zéro, $d\ell$ représente la norme du **vecteur déplacement infinitésimal** $\overrightarrow{d\ell}$. La direction du vecteur $\overrightarrow{d\ell}$ est suivant la tangente au trajet au point considéré.

θ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{d\ell}$ et $\vec{F}$ en chaque point du trajet



(b)

Travail d'une force variable (6)

L'expression mathématique du travail contient les idées clés suivantes :

Concepts clé : relations entre force, déplacement et travail

- Le travail W est fourni par une force $\vec{F}$ qui agit sur un objet physique.
- Le travail dépend de la force qui agit sur l'objet mais aussi du déplacement de cet objet.
- La valeur du travail dépend de la direction de $\vec{F}$ par rapport au déplacement de l'objet.
- Le travail peut être positif, négatif ou nul. Cela dépend de l'angle entre le vecteur force $\vec{F}$ et le vecteur déplacement $d\vec{\ell}$
- Si le déplacement est nul alors $W = 0$ même si une force agit sur l'objet .

Travail d'une force variable (6)

- **En coordonnées cartésiennes**, $\overrightarrow{d\ell} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$ et $\vec{F} = F_x\,\vec{u}_x + F_y\,\vec{u}_y + F_z\,\vec{u}_z$, le produit scalaire s'écrit alors :

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

- **En coordonnées polaires**, $\overrightarrow{d\ell} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta$ et $\vec{F} = F_r\,\vec{u}_r + F_\theta\,\vec{u}_\theta$, le produit scalaire s'écrit alors :

$$W = \int_0^\infty F_r dr + \int_0^{2\pi} rF_\theta d\theta$$

Travail d'une force variable (7)

- **En coordonnées cylindriques**, $\overrightarrow{d\ell} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$ et $\vec{F} = F_r\,\vec{u}_r + F_\theta\,\vec{u}_\theta + F_z\,\vec{u}_z$, le produit scalaire s'écrit alors :

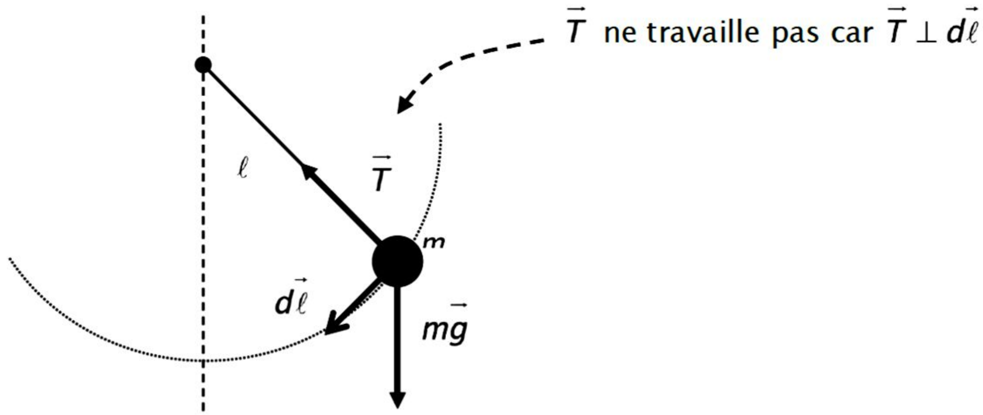
$$W = \int_0^\infty F_r\,dr + \int_0^{2\pi} rF_\theta\,d\theta + \int_{z_A}^{z_B} F_z\,dz$$

- **En coordonnées sphériques**, $\overrightarrow{d\ell} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$ et $\vec{F} = F_r\,\vec{u}_r + F_\theta\,\vec{u}_\theta + F_\varphi\,\vec{u}_\varphi$, le produit scalaire s'écrit alors :

$$W = \int_0^\infty F_r\,dr + \int_0^{\pi} rF_\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} r\sin\theta\,F_\varphi\,d\varphi$$

Travail d'une force variable (8)

- $\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$ représente le travail élémentaire, on peut écrire le travail total comme la somme (ici finie) des travaux élémentaires $W = \int \delta W$.
- Si $\vec{F} \perp \overrightarrow{d\ell}$ alors $W = 0$. Une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas. C'est le cas de la tension du fil dans l'exemple du pendule simple ci-dessous.



Travail d'une force variable (9)

- Si $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$ alors

$$W = \int_a^b (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots)\overrightarrow{d\ell} = \int_a^b \vec{F}_1 . \overrightarrow{d\ell} + \int_a^b \vec{F}_2 . \overrightarrow{d\ell} + \int_a^b \vec{F}_3 . \overrightarrow{d\ell} + \cdots$$

On peut écrire ci-dessous:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots$$

Puissance d'une force (1)

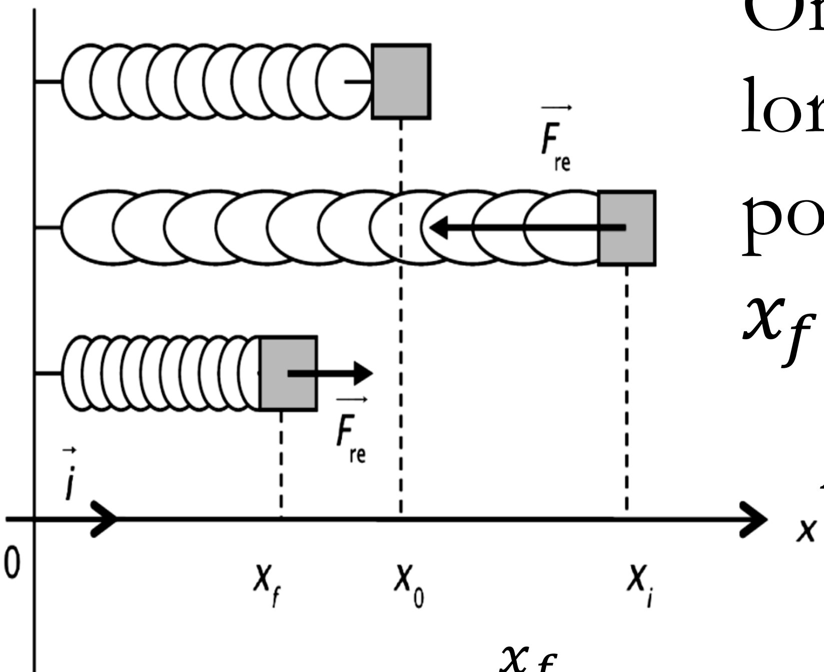
La puissance d'une force représente un travail par unité de temps et s'exprime donc en $\mathrm{J.s^{-1} = W}$ où W est l'abréviation pour Watt et s'exprime par :

$$P \equiv \vec{F}.\vec{v} \quad \text{(Définition de la puissance d'une force)}$$

$$\frac{\delta W}{dt} = P \quad \text{et} \quad W = \int \delta W = \int_a^b \vec{F}.d\vec{\ell} = \int_{t_a}^{t_b} P\,dt$$

Exemples importants de travaux (1)

❑ Travail de la force de rappel élastique d'un ressort



On souhaite calculer le travail de $\vec{F}_{re}$ lorsque la masselotte se déplace de la position initiale x_i à la position finale x_f

$$\overrightarrow{d\ell} = dx\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_{re} = -k(\ell - \ell_0)\vec{\imath} = -k(x - x_0)\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_{re}.\overrightarrow{d\ell} = -k(x - x_0)dx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} -k(x - x_0)dx = -k\left[\frac{(x - x_0)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f}$$

Exemples importants de travaux (2)

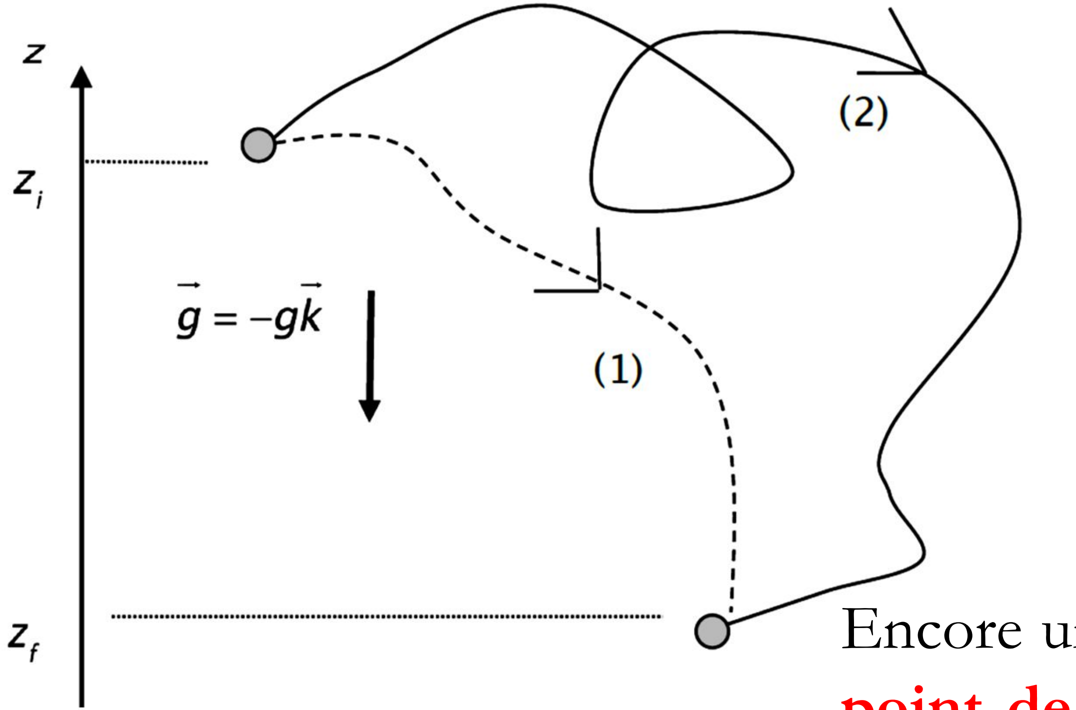
On arrive au résultat important suivant:

$$\boxed{W = -\left(\frac{k}{2}(x_f - x_0)^2 - \frac{k}{2}(x_i - x_0)^2\right)}$$

Ce travail a été écrit sous une forme qui sera facile à interpréter par la suite en utilisant le concept d'énergie potentielle. On constate que **ce travail ne dépend que du point de départ x_i et du point d'arrivée x_f mais pas de la nature du trajet entre ces deux points, c'est-à-dire dans ce cas du nombre d'oscillations entre x_i et x_f.**

Exemples importants de travaux (3)

❑ Travail du poids



$$\overrightarrow{d\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{k}$$

$$m\vec{g}.\overrightarrow{d\ell} = -mgdz$$

$$W = \int_{z_i}^{z_f} -mgdz = -mg[z]_{z_i}^{z_f}$$

$$\boxed{W = -\left(mg\,z_f - mg\,z_i\right)}$$

Encore une fois, **ce travail ne dépend que du point de départ z_i et du point d'arrivée z_f mais pas de la nature du trajet entre ces deux points**. Le travail du poids sur le trajet 1 et celui sur le trajet 2 sont identiques.

Exemples importants de travaux (4)

❑ Travail de la force de gravitation

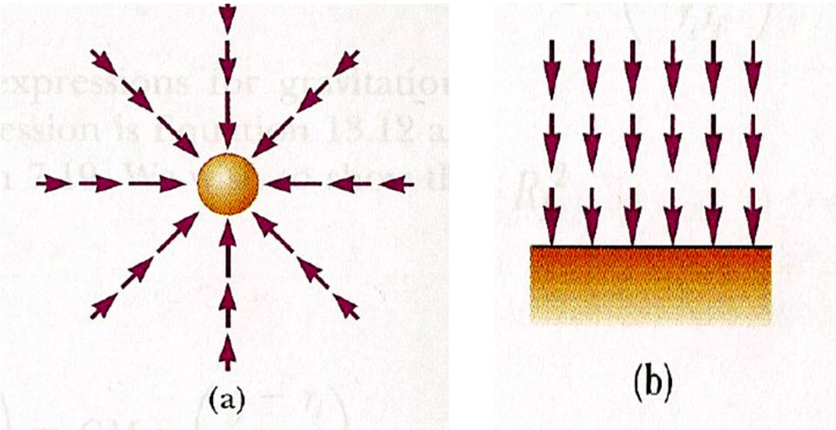
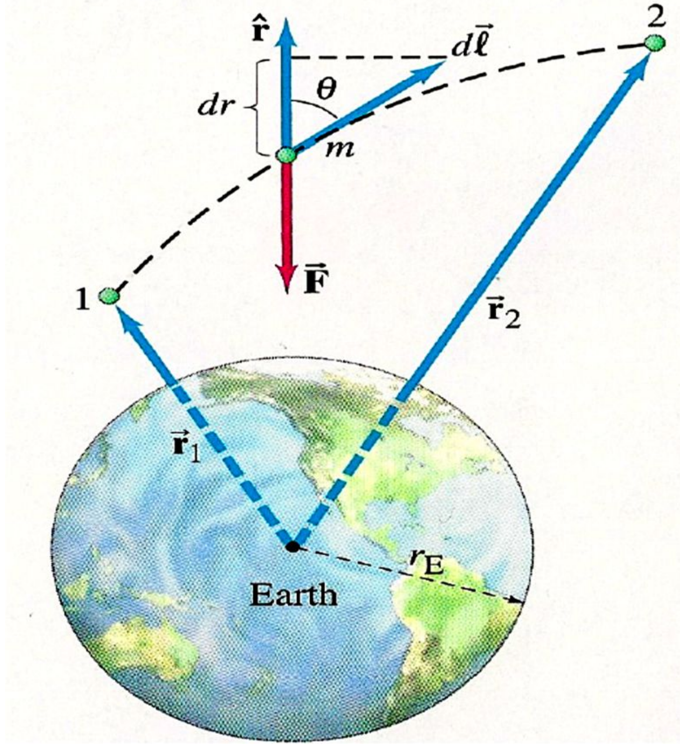


Figure 13.9 (a) The gravitational field vectors in the vicinity of a uniform spherical mass such as the Earth vary in both direction and magnitude. The vectors point in the direction of the acceleration a particle would experience if it were placed in the field. The magnitude of the field vector at any location is the magnitude of the free-fall acceleration at that location. (b) The gravitational field vectors in a small region near the Earth's surface are uniform in both direction and magnitude.

FIGURE 8–19 Arbitrary path of particle of mass m moving from point 1 to point 2.



Exemples importants de travaux (5)

Calculons à présent le travail de la force gravitationnelle exercée sur une masse (par le Terre par exemple) pour aller d'un point 1 à un point 2 quelconque (cf. figure 8.19). Cette force vaut dans le cas présent $\vec{F}_G = -G\frac{mM_T}{r^2}\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques. L'expression $\vec{F}_G = m\vec{g}$ est une bonne approximation uniquement à la surface de la Terre (cf. figure 13.9).

$$W = \int_1^2 \vec{F}_G.\overrightarrow{d\ell} = -GmM_T\int_1^2 \frac{\vec{u}_r.\overrightarrow{d\ell}}{r^2}$$

Exemples importants de travaux (6)

$\vec{u}_r.\overrightarrow{d\ell} = dr$ la composante du vecteur déplacement élémentaire suivant la direction radiale $\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques. On obtient alors

$$W = \int_1^2 \vec{F}_G.\overrightarrow{d\ell} = -GmM_T \int_1^2 \frac{\vec{u}_r.\overrightarrow{d\ell}}{r^2} = GmM_T\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{W = \frac{GmM_T}{r_2} - \frac{GmM_T}{r_1}}$$

Exercices d'application

- Soit une force $\vec{F}$ repérée par ses coordonnées cartésiennes $\vec{F} = 3x\vec{u}_x - 5z\vec{u}_y + 10x\vec{u}_z$ agissant le long de la trajectoire (C) d'équation $y = 2x^2$ et $z = 0$. Montrer qu'entre $x = 0$ et $x = 1$, le travail de $\vec{F}$ est $1{,}5\ J$.

- Soit une force $\vec{F}$ repérée par ses coordonnées cartésiennes $\vec{F} = 3x\vec{u}_x - 5z\vec{u}_y + 10x\vec{u}_z$ avec $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$ et $z = t^2$. Montrer qu'entre $t_1 = 0$ et $t_2 = 1s$, le travail de $\vec{F}$ est $14{,}5\ J$.

L’ Energie en Mécanique

Energie cinétique

L'énergie cinétique (notation E_c) est l'énergie liée au mouvement d'un corps physique

Soit une particule de masse m , animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen donné. L'énergie cinétique est définie par :

$$\boxed{E_c \equiv \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(Définition de l'énergie cinétique)}}$$

E_c étant une énergie, **elle s'exprime en J** . Il s'agit d'une grandeur toujours positive dont la valeur dépend du référentiel dans lequel on l'évalue (par l'intermédiaire de $\vec{v}$)

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, la somme des puissances des forces appliquées au point matériel M de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de ce point matériel :

$$\boxed{\frac{dE_C}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})}$$

Théorème de l’énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C = \sum W_{A\rightarrow B}(\vec{F}_{ext})}$$

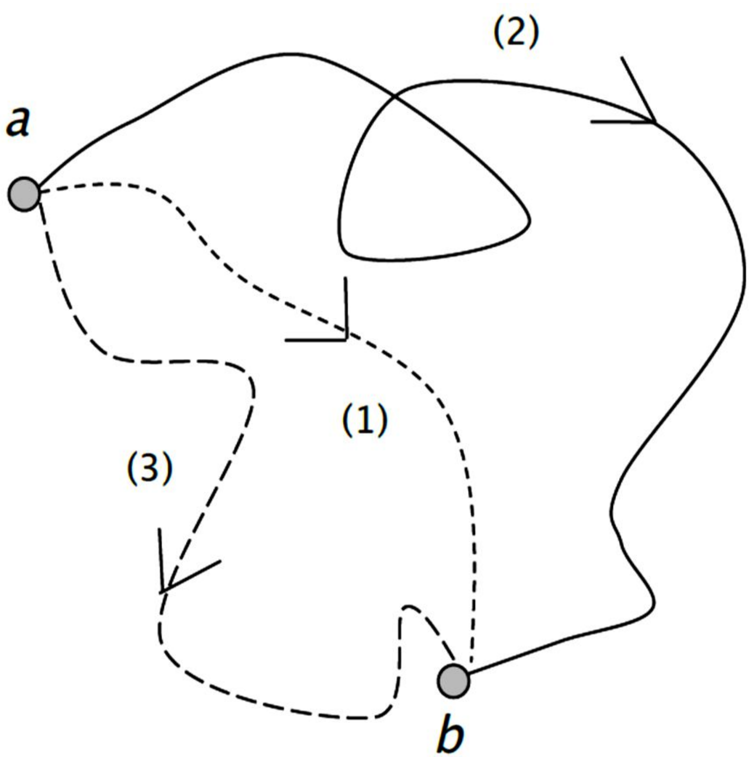
Quelques Remarques (1)

- $\boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)}$ représente une **variation finie** de l'énergie cinétique entre deux instants t_i et t_f .
- dE représente une **variation infinitésimale** (très petite) de l'énergie cinétique entre deux instants infiniment proches, t_i et t_f.
- δW représente une **quantité infinitésimale** (très petite) de travail.
- Si $W > 0$ alors $\Delta E_C > 0$ et la norme de la vitesse croît, on dit que **le travail est moteur**.
- Si $W < 0$ alors $\Delta E_C < 0$ et la norme de la vitesse décroît, on dit que **le travail est résistant**.

Quelques Remarques (2)

- L'expression $\cancel{\Delta W}$ n'a pas de sens, le travail ne varie pas. Un système physique reçoit ou cède une quantité finie de travail W ou une quantité infinitésimale de travail δW . **La notation d et δ ont des significations différentes.**
- Le théorème de l'énergie cinétique est très pratique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement ainsi que les vitesses.
- Le théorème de l'énergie cinétique constitue la première partie du puzzle en vue de l'établissement du théorème de l'énergie mécanique comme nous allons le voir dans la suite.

Forces conservatives et non conservatives (1)



$$W_{a\to b}(1) = W_{a\to b}(2) = W_{a\to b}(3)$$

<u>Conditions pour qu'une force soit conservative :</u>

Une force $\vec{F}$ qui agit sur une particule est dite **CONSERVATIVE** si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes :

- $\vec{F}$ dépend uniquement de la position de la particule $\vec{r}$ (et pas de sa vitesse $\vec{v}$, du temps t et de toute autre variable).
- Pour deux points a et b, le travail $W_{a\to b}$ de la force $\vec{F}$ est le même pour tous les chemins entre a et b.

Forces conservatives et non conservatives (2)

Une conséquence directe du deuxième point de la définition d'une force conservative est que, sur un trajet fermé, le travail d'une force conservative est nul.

$$\boxed{\text{Force conservative} \Rightarrow \oint \vec{F}.d\vec{\ell} = 0}$$

Le symbole $\oint$ signifie que l'on intègre sur un chemin fermé.

Forces conservatives et non conservatives (3)

❑ **Le poids** $m\vec{g}$ est **une force conservative**. En effet, le travail pour aller d'un point à un autre $W_{m\vec{g}} = -mg\left(z_f - z_i\right)$ ne dépend que de l'altitude de départ et de l'altitude d'arrivée mais pas du trajet suivi. De plus $m\vec{g}$ ne dépend que de la position de la particule par l'intermédiaire de $\vec{g}$.

❑ **La force de rappel élastique** $\vec{F}_{re}$ **est une force conservative**. En effet, le travail pour aller d'un point à un autre $W_{\vec{F}_{re}} = -\left[\frac{k}{2}\left(x_f - x_0\right)^2 - \frac{k}{2}(x_i - x_0)^2\right]$ ne dépend que de la position de départ et de la position d'arrivée mais pas du trajet suivi. De plus $\vec{F}_{re} = -k(x - x_0)\vec{\imath}$ ne dépend que de la position de la particule.

Forces conservatives et non conservatives (4)

- **La force de frottement fluide n'est pas conservative**. En effet, son expression dépend de la vitesse de la particule et de plus, on peut montrer que son travail dépend du trajet suivi.
- **La force de frottement statique et dynamique n'est pas conservative.** En effet, on peut montrer que leur travail dépend du trajet suivi.

Les forces conservatives jouent un rôle important en physique. Nous allons montrer qu'elles peuvent s'écrire comme la dérivée d'une fonction dite **énergie potentielle** qui constitue, après le théorème de l'énergie cinétique, le deuxième morceau du puzzle dans l'établissement du théorème de l'énergie mécanique.

Energie Potentielle (1)

L'énergie potentielle (notation E_p) est l'énergie liée à la **configuration spatiale** d'un système physique.

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'énergie potentielle est intimement liée aux forces conservatives. Nous allons illustrer cela sur l'exemple de la force de rappel élastique.

$$W_{\vec{F}_{re}} = -\left[\frac{k}{2}\left(x_f - x_0\right)^2 - \frac{k}{2}(x_i - x_0)^2\right]$$ On introduit la fonction

$$E_P(x) = \frac{k}{2}\left(x_f - x_0\right)^2 + \mathrm{A}$$ ou A est une constante arbitraire quelconque

Energie Potentielle (2)

On peut alors écrire $W_{\vec{F}_{re}} = -\left[E_P\left(x_f\right) - E_P(x_i)\right] = -\Delta E_P$

On constate que $W_{\vec{F}_{re}}$ s'écrit comme l'opposée de la variation d'une fonction $E_P(x)$ qui dépend des seules coordonnées d'espace de la particule, ici x .

Pour une force conservative, il existe une fonction énergie potentielle $E_p\left(\vec{r}\right)$ telle que :

$$W = \int_i^f \vec{F}.d\vec{\ell} = -\left[E_p\left(\vec{r}_f\right) - E_p\left(\vec{r}_i\right)\right] \equiv -\Delta E_p$$

$\left(\textbf{Pour un travail infinitésimal: } \delta W = \vec{F}.d\vec{\ell} = -dE_p\right)$

Energie Potentielle (2)

On montre que pour une force conservative :

$$dE_P = \overrightarrow{grad}E_P.\overrightarrow{dl} = -\vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P}$$

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \qquad \overrightarrow{d\ell} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{d\ell} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z\right).\left(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{d\ell} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

Energie Potentielle (3)

Quelques rappels :

- **Coordonnées Cartésiennes :**

$$\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

- **Coordonnées Cylindriques:**

$$\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

- **Coordonnées sphériques:**

$$\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

Energie Potentielle (4)

Concepts clés : énergie potentielle et force conservative

- L'énergie potentielle E_p résulte d'une force qui agit sur un objet. Comme une force provient toujours de l'interaction entre deux objets, E_p **est une propriété des particules qui interagissent**.
- L'énergie potentielle est l'énergie que possède un système physique en vertu **de sa configuration spatiale**.
- L'énergie potentielle est une **énergie stockée**, elle peut être convertie en énergie cinétique (voir la suite).
- L'énergie potentielle est **un scalaire**, elle peut être positive ou négative.
- Les forces associées à une énergie potentielle sont des **forces conservatives.**
- L'énergie potentielle, comme toute énergie, est toujours définie à une constante arbitrairement près. Nous ne mesurons expérimentalement que des différences d'énergie.

Energie Potentielle (5)

★ A ABSOLUMENT CONNAITRE ★

Force	Energie potentielle associée
Force de rappel élastique : $\overrightarrow{F_{re}} = -k\left(x - x_0\right)\vec{i}$	$E_p\left(x\right) = \frac{k}{2}\left(x - x_0\right)^2 + A$ $\left(A = 0 \text{ si } E_p = 0 \text{ à } x = x_0\right)$
Poids : $\vec{P} = -mg\vec{k}$	$E_p\left(z\right) = mgz + A$ $\left(\text{avec } z \text{ vers le haut}\right)$ $\left(A = 0 \text{ si } E_p = 0 \text{ à } z = 0\right)$
Interaction gravitationnelle : $\overrightarrow{F_G} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	$E_p\left(r\right) = -\frac{GmM_T}{r} + A$ $\left(\text{avec } r \text{ direction radiale}\right)$ $\left(A = 0 \text{ si } E_p = 0 \text{ à } r = \infty\right)$

Energie Potentielle (6)

❑ **Trouver la force qui dérive d'une énergie potentielle si on connaît cette dernière.**

✓ **Cas unidimensionnel**

On considère un travail infinitésimal. On se place pour l'instant à une dimension, par exemple suivant (Ox).

$\delta W = F_x dx = -dE_p(x)$ soit :

$$\boxed{\boldsymbol{F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}}}$$

La force est donc l'opposée de la dérivée (spatiale) de l'énergie potentielle, c'est pour cela que l'on dit que la force dérive d'une énergie potentielle.

Energie Potentielle (7)

✓ **Cas général en 3D**

Cette fois $\vec{F} = F_x\,\vec{u}_x + F_y\,\vec{u}_y + F_z\,\vec{u}_z$ et l'énergie potentielle est une fonction des trois variables spatiales : $E_p(x, y, z)$. En généralisant ce qui a été fait dans le cas unidimensionnel, on peut écrire :

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\,; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}\,; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}}$$

Energie Mécanique (1)

Soit une particule de masse m , animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen donné. Elle est soumise à **des forces conservatives $\overrightarrow{F_c}$** et à des forces non-conservatives $\overrightarrow{F_{nc}}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique:

$$W_{totale}\left(\sum \vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}\right) = W_c(\vec{F}_c) + W_{nc}(\vec{F}_{nc}) = \Delta E_C.$$

$$W_{i\rightarrow f}(\vec{F}_c) = -\Delta E_P \quad \Longrightarrow W_{nc}(\vec{F}_{nc}) = \Delta E_C + \Delta E_P$$

Energie Mécanique (2)

Par définition, on appelle énergie mécanique (notée E_m) la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$\boxed{E_m \equiv E_c + E_p \quad \left(\text{Définition de l'énergie mécanique}\right)}$$

Théorème de l’énergie mécanique (1)

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points :

$$\boxed{\Delta E_m = E(B) - E(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{nc})}$$

Les forces non conservatives étant des forces résistantes $(W < 0)$ **l’énergie mécanique d’un système ne peut que diminuer au cours du temps**.

Théorème de l'énergie mécanique (2)

Si la particule n'est soumise qu'à des forces conservatives $W_{nc}(\vec{F}_{nc}) = 0$. Ainsi $\boldsymbol{\Delta E_m = 0}$. Cela signifie que l'énergie mécanique reste constante au cours du temps, il y a donc conservation de l'énergie mécanique.

$$\text{Si } W_{nc} = 0 \Rightarrow \Delta E_m \equiv \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

L'énergie mécanique d'une particule soumise seulement à des forces conservatives est conservée.

Théorème de la puissance mécanique

On peut réécrire le théorème de l'énergie mécanique en faisant apparaître la puissance des forces non-conservatives. Pour une variation infinitésimale :

$$dE_m = dE_C + dE_P = \delta W_c + \delta W_{nc} - \delta W_c = \delta W_{nc} = P_{nc} dt$$

On arrive à la forme dérivée du théorème de l'énergie mécanique.

Forme dérivée du théorème de l'énergie mécanique: $\dfrac{dE_m}{dt} = P_{nc}$

Intégrale première du mouvement

On considère toujours une particule soumise à une force conservative (ou plusieurs forces conservatives) et on travaille à une dimension, dans ce cas-là:

$$\boxed{E_m \equiv E_c + E_p = \text{constante}} \qquad \Longrightarrow \boxed{\boxed{\frac{dE}{dt} = 0}}$$

Cette équation est appelée **intégrale première du mouvement** intégrale première de l'énergie mécanique puisqu'elle relie les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps.

Etats liés et stabilité d'un système mécaniquement isolé

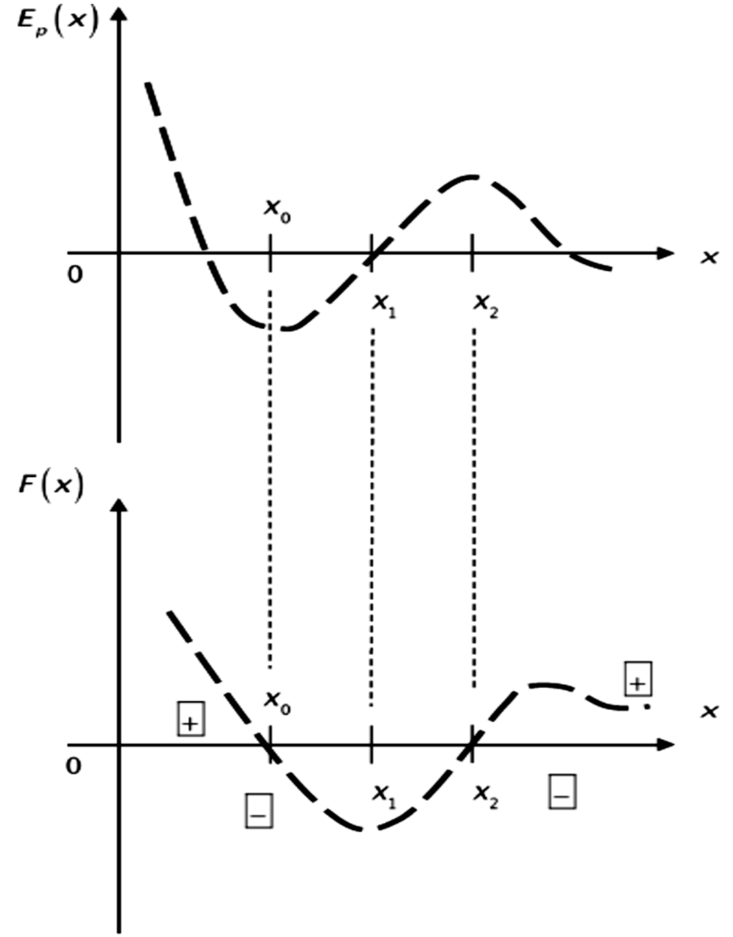
Equilibre d'un point matériel soumis à une force conservative (1)

On considère un problème à une dimension, par exemple suivant (Ox).

❑ Diagramme d'énergie

La figure ci-contre représente l'énergie potentielle $\boldsymbol{E_p(x)}$ à laquelle est soumise la particule. La force conservative correspondante est donnée par

$$\boldsymbol{F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}}$$



Equilibre d'un point matériel soumis à une force conservative (2)

❑ Condition d'équilibre

On constate que pour x_0 et x_2 , $F(x) = 0$. La particule est en équilibre ce qui est équivalent à la condition $\boldsymbol{dE_P/dx = 0}$ $\boldsymbol{E_p(x)}$ est extrémale, minimale ou maximale.

❑ Stabilité de l'équilibre

⇒ **L'équilibre est stable** si la force $F(x)$ a tendance à ramener la particule vers sa position d'équilibre.

⇒ **L'équilibre est instable** si la force $F(x)$ éloigne la particule de sa position d'équilibre.

Equilibre d'un point matériel soumis à une force conservative (3)

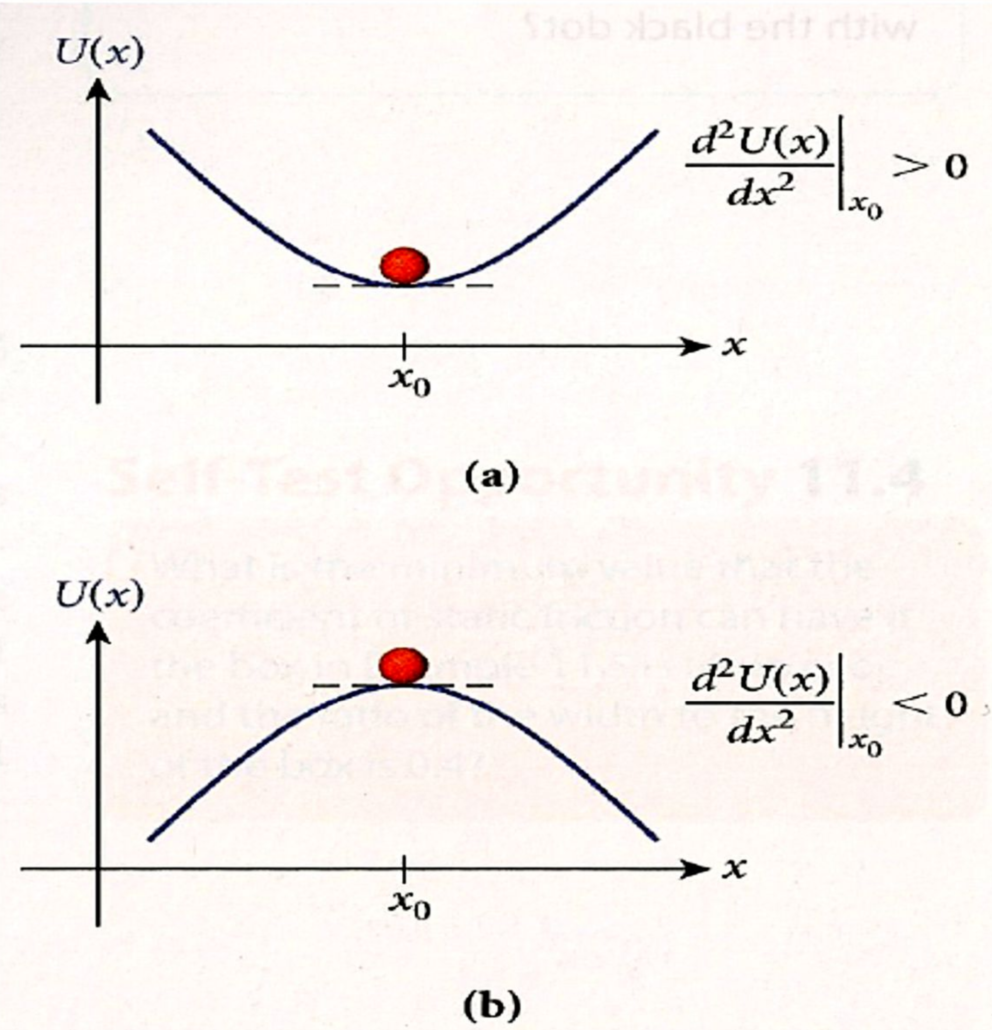
$$\textbf{EQUILIBRE en } x = x_e \Leftrightarrow \frac{dE_p(x)}{dx} = 0$$

$$\text{Equilibre } \textbf{STABLE} \text{ en } x = x_e \Leftrightarrow \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} > 0 \quad (\text{on parle de puits de potentiel})$$

$$\text{Equilibre } \textbf{INSTABLE} \text{ en } x = x_e \Leftrightarrow \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} < 0 \quad (\text{on parle de mont de potentiel})$$

Equilibre d'un point matériel soumis à une force conservative (4)

l'énergie potentielle est notée ici $U(x)$.



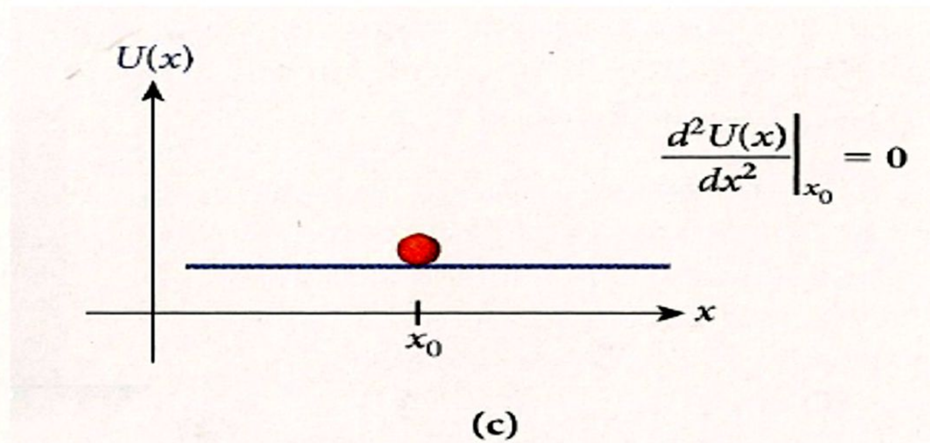


FIGURE 11.16 Local shape of the potential energy function at an equilibrium point: (a) stable equilibrium; (b) unstable equilibrium; (c) neutral equilibrium.

Domaine accessible à la trajectoire (1)

Lorsqu'un système est conservatif, son énergie mécanique se conserve. On a donc pour un tel système

$$E = E_C + E_P = cte$$

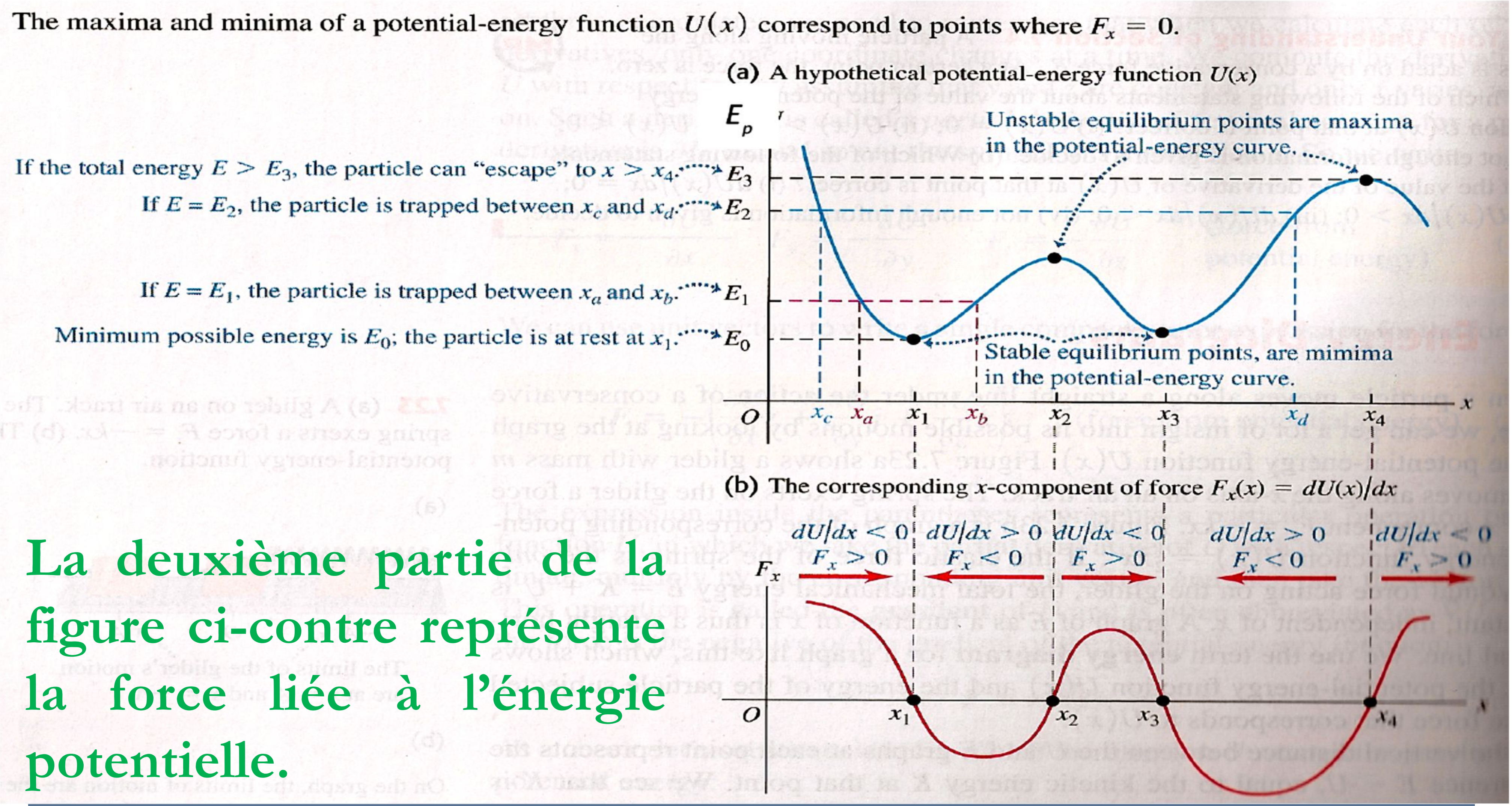
Les états liés du système sont définis par :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2 > 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - E_P)} \geq 0}$$

$$\Longrightarrow E_m - E_P \geq 0 \Longrightarrow E_m \geq E_P$$

Les domaines accessibles sont ceux pour lesquels $v \geq 0$ soit $E_m \geq E_p$. Si $E_m = E_p$ alors $v = 0$.

Domaine accessible à la trajectoire (2)



La deuxième partie de la figure ci-contre représente la force liée à l'énergie potentielle.

Domaine accessible à la trajectoire (3)

Considérons la figure ci-dessus qui représente une énergie potentielle hypothétique à laquelle est soumise notre particule.
Suivant la valeur constante de l'énergie mécanique de la particule, son domaine accessible doit vérifier $\boldsymbol{E_m \geq E_P}$.

- **Cas 0** : $\mathbf{E_m = E_0}$.

La particule est contrainte de rester en $x = x_1$. Elle est au fond du puits de potentiel, on dit que la particule est dans un **ETAT LIE**.

- **Cas 1** : $\mathbf{E_m = E_1}$.

Le domaine accessible à la particule est $x_a \leq x \leq x_b$. Elle est piégée dans le puits potentiel, elle ne peut pas franchir la barrière de potentiel. On a encore un **ETAT LIE**.

Domaine accessible à la trajectoire (4)

❑ **Cas 2** : $\mathbf{E_m = E_2}$.

Le domaine accessible à la particule est $x_c \leq x \leq x_d$. Elle est piégée dans le puits potentiel, elle ne peut pas franchir la barrière de potentiel. On a encore un **ETAT LIE**.

❑ **Cas 3** : $\mathbf{E_m > E_3}$.

Le domaine accessible à la particule est $x_c \leq x$. La particule peut s'échapper du puits de potentiel. L'énergie mécanique de la particule est trop grande pour confiner la particule dans le puits. On dit que la particule est dans un **ETAT DE DIFFUSION**.

Exemples de diagrammes d'énergie potentielle (1)

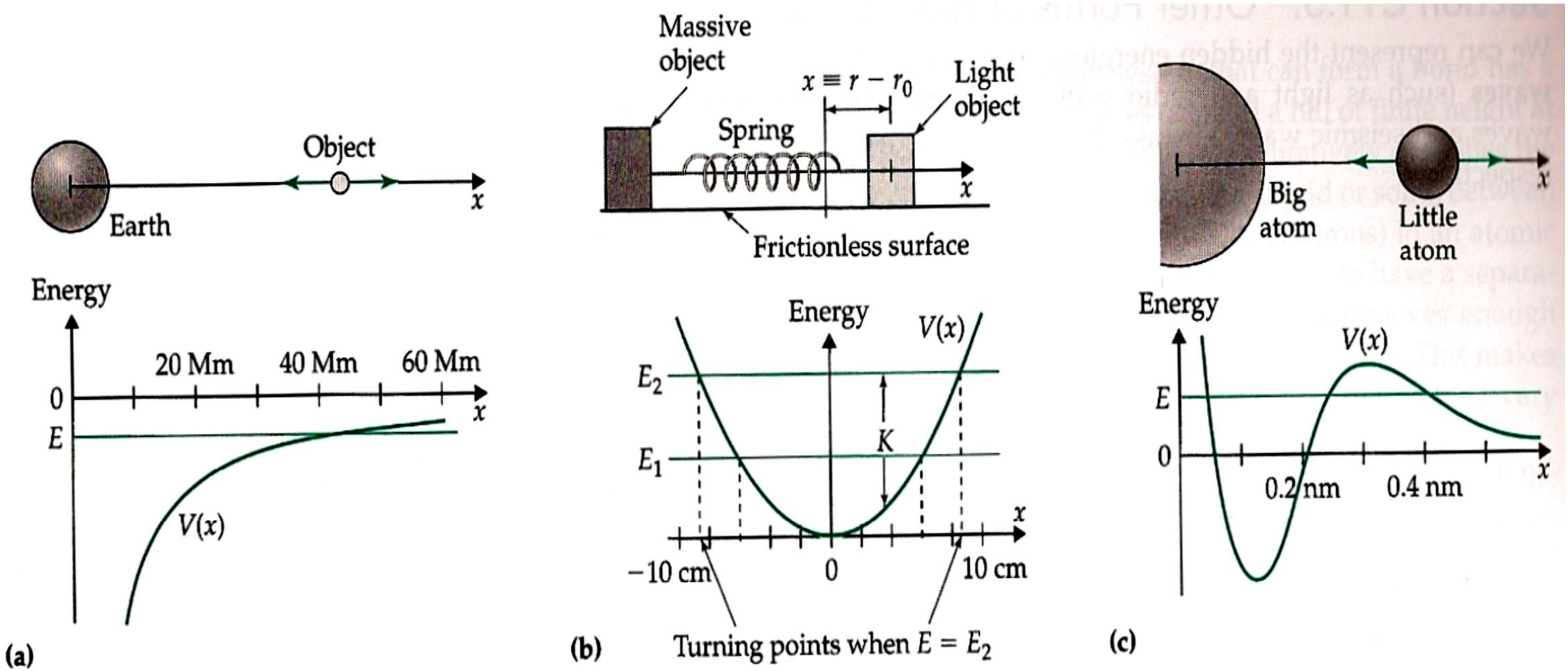


Figure C11.1
Examples of potential energy diagrams.

Exemples de diagrammes d'énergie potentielle (2)

L'énergie potentielle est toujours associée à **l'interaction entre deux corps physiques** ; entre l'objet et la terre, entre une masse et un ressort ou encore entre les deux atomes. Dans notre cours de mécanique, nous n'étudions que des corps ponctuels (particules). C'est donc par un abus de langage (dangereux) que l'on parle de l'énergie potentielle du corps ponctuel étudié. Par exemple, quand on parle de l'énergie d'une particule de masse m dans le champ de gravité de la terre, on devrait parler de l'énergie potentielle du système (Terre-particule).